2018年2月3日　数学Ⅰ・Ⅱ・Ⅲ・A・B

〔Ⅰ〕

(1)	ア	イ	ウ	エ					
	5	3	5	6					
(2)	ア	イ	ウ	エ	オ				
	5	3	6	0	1				
(3)	ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ	ク	ケ
	3	4	5	3	3	4	4	8	1
(4)	ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ	ク	ケ
	5	3	5	8	2	8	6	1	2
	コ	サ	シ						
	1	3	7						

〔Ⅱ〕(1)　$f(x)=\dfrac{1}{4}(x^2-2)(x^2-6)$ であるから，$f(x)=0$ のとき $x^2=2,6$

$$\therefore\ x=\pm\sqrt{2},\pm\sqrt{6}$$

(2)　$f'(x)=x^3-4x=x(x^2-4)=(x+2)x(x-2)$ であるから，$f(x)$ の増減は次のようになる．

x		-2		0		2	
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘		↗		↘		↗

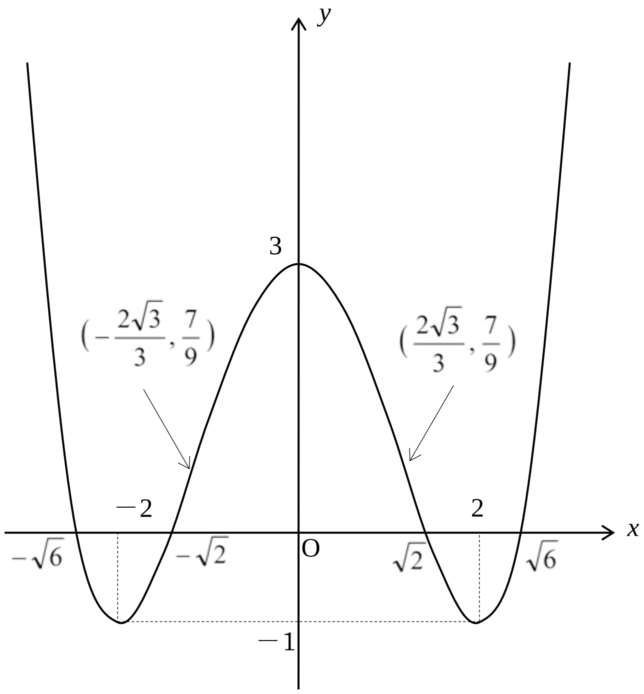
よって $f(x)$ の極値は

極大値　$f(0)=3$，極小値　$f(\pm 2)=-1$

(3)　$f''(x)=3x^2-4=3\left(x+\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\right)\left(x-\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\right)$ であるから，$y=f(x)$ の凹凸は次のようになる．

x		$-\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$		$\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$	
$f''(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\cup$		$\cap$		$\cup$

変曲点は $\left(-\dfrac{2\sqrt{3}}{3},\ \dfrac{7}{9}\right)$，$\left(\dfrac{2\sqrt{3}}{3},\ \dfrac{7}{9}\right)$ である．$y=f(x)$ のグラフは図のようになる．



(4) $\displaystyle\int f(x)\,dx = \frac{1}{20}x^5 - \frac{2}{3}x^3 + 3x + C = F(x) + C$（$C$ は積分定数）とおく．$0 < x < \sqrt{2}$ で $f(x) > 0$，$\sqrt{2} < x < 2$ で $f(x) < 0$ であるから，

$$\begin{aligned}
\int_0^2 |f(x)|\,dx &= \int_0^{\sqrt{2}} f(x)\,dx - \int_{\sqrt{2}}^2 f(x)\,dx \\
&= \Big[\ F(x)\ \Big]_0^{\sqrt{2}} - \Big[\ F(x)\ \Big]_{\sqrt{2}}^2 \\
&= -F(0) + 2F\left(\sqrt{2}\right) - F(2) \\
&= -0 + 2 \times \frac{28\sqrt{2}}{15} - \frac{34}{15} \\
&= \frac{56\sqrt{2} - 34}{15}
\end{aligned}$$

［Ⅲ］(1)　$a_{n+1} = \dfrac{1}{3}a_n + \dfrac{2}{3}b_n \cdots$ ①　と　$b_{n+1} = \dfrac{1}{2}a_n + \dfrac{1}{2}b_n \cdots$ ②　の差をとると

$$a_{n+1} - b_{n+1} = -\frac{1}{6}(a_n - b_n)\quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

となるので，数列 $\{a_n - b_n\}$ は初項 $a_1 - b_1 = 1$，公比 $-\dfrac{1}{6}$ の等比数列である．よって

$$a_n - b_n = \left(-\frac{1}{6}\right)^{n-1}\quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

(2)　(1) より $b_n = a_n - \left(-\frac{1}{6}\right)^{n-1} \cdots$ ③ であるから，①に代入すると

$$a_{n+1} = \frac{1}{3}a_n + \frac{2}{3}\left\{a_n - \left(-\frac{1}{6}\right)^{n-1}\right\}$$

$$\therefore\ a_{n+1} - a_n = -\frac{2}{3}\left(-\frac{1}{6}\right)^{n-1} \cdots \text{④}$$

(3)　$n \geqq 2$ のとき，④より

$$a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1}(a_{k+1} - a_k) = 1 - \frac{2}{3}\sum_{k=1}^{n-1}\left(-\frac{1}{6}\right)^{k-1}$$

である．よって③を用いると

$$a_n + b_n = 2a_n - \left(-\frac{1}{6}\right)^{n-1} = 2 - \frac{4}{3}\sum_{k=1}^{n-1}\left(-\frac{1}{6}\right)^{k-1} - \left(-\frac{1}{6}\right)^{n-1}$$

となる．$\left|-\frac{1}{6}\right| < 1$ より

$$\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{6}\right)^{n-1} = 0\,,\quad \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n-1}\left(-\frac{1}{6}\right)^{k-1} = \sum_{k=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{6}\right)^{k-1} = \frac{1}{1-\left(-\frac{1}{6}\right)} = \frac{6}{7}$$

であるから

$$\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = 2 - \frac{4}{3} \times \frac{6}{7} = \frac{6}{7}$$