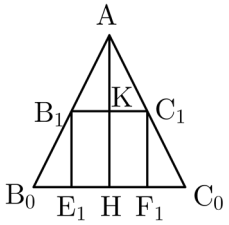
2023 中京大学数学解答例　23 数Ⅰ・Ⅱ・Ⅲ・A・B

［Ⅰ］

(1)	ア	イ	ウ	エ	オ						
	2	4	1	2	2						
(2)	ア	イ	ウ	エ	オ	カ					
	2	5	3	7	5	2					
(3)	ア	イ	ウ	エ	オ						
	3	1	0	1	7						
(4)	ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ	ク	ケ	コ	サ
	6	5	6	1	5	6	8	0	2	8	8
	シ										
	0										

［Ⅱ］

(1)　A から B_0C_0 に下ろした垂線 AH と B_1C_1 との交点を K とする。



$B_0H = C_0H = \frac{1}{2}B_0C_0 = 2$，$AB_0 = 2\sqrt{5}$ より $AH = \sqrt{(2\sqrt{5})^2 - 2^2} = 4$ であるから，正方形 T_1 の 1 辺の長さを a_1 とおくと $AK = 4 - a_1$ である。B_0C_0 と B_1C_1 は平行であるから

$$\frac{B_1C_1}{B_0C_0} = \frac{AK}{AH}，すなわち \frac{a_1}{4} = \frac{4 - a_1}{4}$$

が成り立ち，これより $a_1 = 2$ となる。よって

$$S_1 = a_1{}^2 = 4$$

である。

(2)　正方形 T_n の 1 辺の長さを a_n $(n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ とおく。三角形 AB_nC_n $(n = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$ はすべて相似であるから，三角形 $AB_{n-1}C_{n-1}$ とその内接正方形 T_n について(1)と同様の考察を行い，$B_nC_n = a_n$，$B_{n-1}C_{n-1} = a_{n-1}$ であり A から $B_{n-1}C_{n-1}$ に下ろした垂線の長さも a_{n-1} であることに注目すると，

$$a_n = \frac{1}{2}a_{n-1} \quad (n = 2,\ 3,\ \cdots)$$

が成り立つことがわかる。よって

$$S_n = \left(\frac{1}{2}\right)^2 S_{n-1} = \frac{1}{4}S_{n-1} \quad (n = 2,\ 3,\ \cdots)$$

である。

(3)　(1)，(2)より数列 $\{S_n\}$ $(n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ は初項 4，公比 $\frac{1}{4}$ の等比数列であるから，

$$\sum_{k=1}^{n} S_k = \frac{4\left\{1-\left(\frac{1}{4}\right)^n\right\}}{1-\frac{1}{4}} = \frac{16}{3}\left\{1-\left(\frac{1}{4}\right)^n\right\}$$

である。

［Ⅲ］

(1)　$y=\dfrac{e^{2x}+e^{-2x}}{2}$ のとき，$e^{2x}=t$ とおいて $y=\dfrac{t+\frac{1}{t}}{2}$ を整理すると

$$t^2-2yt+1=0$$

となる。

$e^{2x}>0$ であるから $y=\dfrac{e^{2x}+e^{-2x}}{2} \geqq \sqrt{e^{2x}\cdot e^{-2x}}=1$ であり，この方程式は実数解

$$t=y\pm\sqrt{y^2-1}$$

をもつ。2 解の積は 1 であり，$x \geqq 0$ のとき $e^{2x} \geqq 1$ であるから e^{2x} はこのうちの大きい方の解，すなわち

$$e^{2x}=y+\sqrt{y^2-1}$$

である。両辺の対数をとって 2 で割ると

$$x=\frac{1}{2}\log\left(y+\sqrt{y^2-1}\right)\quad (y \geqq 1)$$

となるので，逆関数は

$$g(x)=\frac{1}{2}\log\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)\quad (x \geqq 1)$$

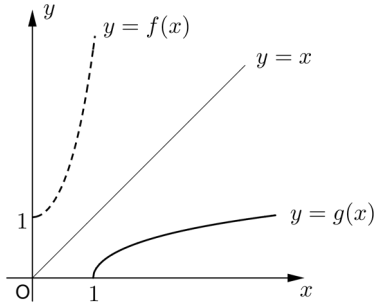
である。

(2)　$f(x)=\dfrac{e^{2x}+e^{-2x}}{2}$ とおくと $g(x)$ は $f(x)$ の逆関数であるから，曲線 $y=g(x)$ は曲線 $y=f(x)$ と直線 $y=x$ に関して対称である。よって $y=f(x)$ の概形を調べればよい。

$$f'(x)=e^{2x}-e^{-2x},\quad f''(x)=2(e^{2x}+e^{-2x})$$

であり，$x>0$ のとき $e^{2x}>e^{-2x}>0$ であるから $f'(x)>0,\ f''(x)>0$ である。よって $x>0$ のとき $f(x)$ は単調増加で曲線 $y=f(x)$ は下に凸である。また，$f(0)=1,\ \lim_{x\to\infty} f(x)=\infty$ である。

これらのことから $y=f(x)$ の概形を描き，直線 $y=x$ に関して対称移動すれば $y=g(x)$ の概形が得られる。結果は図のようになる。



(3)　対称性から，S は曲線 $y=f(x)$，y 軸および直線 $y=3$ で囲まれる部分の面積に等しい。曲線 $y=f(x)$ と直線 $y=3$ の交点の x 座標を a とおくと，

$$S=\int_0^a \{3-f(x)\}\,dx = 3a-\left[\frac{e^{2x}-e^{-2x}}{4}\right]_0^a = 3a-\frac{1}{4}(e^{2a}-e^{-2a})$$

である。(1)より

$$e^{2a}=3+\sqrt{3^2-1}=3+2\sqrt{2}\ ,$$

$$a=\frac{1}{2}\log\left(3+2\sqrt{2}\right)=\frac{1}{2}\log\left(1+\sqrt{2}\right)^2=\log\left(1+\sqrt{2}\right)$$

となるので,

$$S=3\log\left(1+\sqrt{2}\right)-\frac{1}{4}\left(3+2\sqrt{2}-\frac{1}{3+2\sqrt{2}}\right)=3\log\left(1+\sqrt{2}\right)-\sqrt{2}$$

である。