数Ⅰ・Ⅱ・Ⅲ・A・B・C 2024 年 2 月 3 日

※2025　　「　Ⅰ・Ⅱ・Ⅲ・A・B・C」に　する2024　　の　　は「　Ⅰ・Ⅱ・Ⅲ・A・B」です。

［Ⅰ］

(1)	ア	イ	ウ	エ	オ	カ					
	0	1	2	5	6	3					
(2)	ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ	ク	ケ		
	9	1	4	1	7	1	4	1	1		
(3)	ア	イ	ウ	エ	オ						
	0	2	3	3	4						
(4)	ア	イ	ウ	エ							
	9	0	4	2							

［Ⅱ］

(1)　$a_1 = 4$ より

$$b_1 = \log_2 a_1 = \log_2 4 = 2$$

である。$a_{n+1} = 2\sqrt{2a_n}$ より

$$\log_2 a_{n+1} = \log_2 2\sqrt{2a_n} = \log_2 2 + \frac{1}{2}(\log_2 2 + \log_2 a_n)$$

であるから，数列 $\{b_n\}$ の漸化式は

$$b_{n+1} = \frac{1}{2}b_n + \frac{3}{2}$$

である。

(2)　$b_{n+1} = \frac{1}{2}b_n + \frac{3}{2}$ より

$$b_{n+1} - 3 = \frac{1}{2}(b_n - 3) \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

が成り立つので，数列 $\{b_n - 3\}$ は公比が $\frac{1}{2}$ の等比数列である。初項は $b_1 - 3 = -1$ であるから，

$$b_n - 3 = -1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

となる。よって数列 $\{a_n\}$ の一般項は

$$a_n = 2^{b_n} = 2^{-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + 3} = 8 \cdot 2^{-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}$$

である。

(3)　$\lim_{n\to\infty}\left\{-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\} = 0$ であるから，

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 8$$

である。

［Ⅲ］

(1)　$f(x)=(9-x^2)^{-\frac{1}{2}}$ であるから，

$$f'(x)=-\frac{1}{2}(9-x^2)^{-\frac{3}{2}}\cdot(-2x)=x(9-x^2)^{-\frac{3}{2}}$$

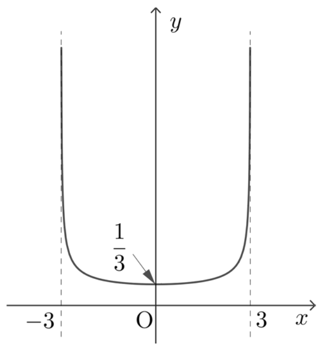
$$\begin{aligned}f''(x)&=(9-x^2)^{-\frac{3}{2}}+x\left\{-\frac{3}{2}(9-x^2)^{-\frac{5}{2}}\cdot(-2x)\right\}=(9-x^2)^{-\frac{5}{2}}\left\{(9-x^2)+3x^2\right\}\\&=(9+2x^2)(9-x^2)^{-\frac{5}{2}}\end{aligned}$$

である。

(2)　関数 $f(x)$ の定義域は，$9-x^2>0$ より $-3<x<3$ である。

$f'(x)=x(9-x^2)^{-\frac{3}{2}}$ より，$f(x)$ の増減は次のようになる。

x	-3	$\cdots$	0	$\cdots$	3
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		□	極小	□	



極小値は $f0)=\dfrac{1}{3}$ である。

$-3<x<3$ において，$f''(x)>0$ であるから，曲線 $y=f(x)$ は下に凸である。

$\displaystyle\lim_{x\to-3+0} f(x)=\infty$，$\displaystyle\lim_{x\to3-0} f(x)=\infty$ であるから，2 直線 $x=-3,\ x=3$ は曲線 $y=f(x)$ の漸近線である。

$f(-x)=f(x)$ が成り立つので，曲線 $y=f(x)$ は y 軸に関して対称である。

以上より，曲線 $y=f(x)$ の概形は図のようになる。

(3)　$f(x)=\dfrac{2}{3}$ のとき，$9-x^2=\dfrac{9}{4}$ より $x=\pm\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$ である。直線 $y=\dfrac{2}{3}$ と曲線 $y=f(x)$ で囲まれる部分の面積を S とおくと，図形は y 軸に関して対称であるから，

$$S=2\int_0^{\frac{3\sqrt{3}}{2}}\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{\sqrt{9-x^2}}\right)dx$$

である。$x=3\sin\theta\ \left(-\dfrac{\pi}{2}\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}\right)$ とおくと，$\dfrac{dx}{d\theta}=3\cos\theta$ であり，$x=0$ のとき $\sin\theta=0$ より $\theta=0$，

$x=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$ のとき $\sin\theta=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ より $\theta=\dfrac{\pi}{3}$ であるから，

$$\int_0^{\frac{3\sqrt{3}}{2}} \frac{1}{\sqrt{9-x^2}}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{3\cos\theta d\theta}{\sqrt{9(1-\sin^2\theta)}} = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{3\cos\theta d\theta}{3\cos\theta} = \int_0^{\frac{\pi}{3}} d\theta = \frac{\pi}{3}$$

となる。よって

$$S = 2\left(\frac{2}{3}\times\frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{3}\right) = 2\sqrt{3} - \frac{2}{3}\pi$$

である。