

中京大／数学 I ・ II ・ A [ 2023 - 23 ]

[ I ]

(1)	ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ
	1	6	3	6	0	3	3

(2)	ク	ケ	コ	サ	シ	ス	セ	ソ	タ
	3	2	5	2	5	2	1	1	1

(3)	チ	ツ	テ	ト	ナ	ニ
	2	5	4	2	3	8

[ II ]

(1)  $\cos \theta = x$  のとき,

$$\cos 2\theta = 2\cos^2 \theta - 1 = 2x^2 - 1$$

$$\cos 3\theta = 4\cos^3 \theta - 3\cos \theta = 4x^3 - 3x$$

$$\cos 4\theta = 2\cos^2 2\theta - 1$$

$$= 2(2x^2 - 1)^2 - 1 = 8x^4 - 8x^2 + 1$$

方程式は,

$$a(8x^4 - 8x^2 + 1) + a(2x^2 - 1) + 1 = 0 \iff 8ax^4 - 6ax^2 + 1 = 0$$

$x^2 = X$  とし,  $X$  についての方程式を  $f(X) = 0$  とおくと

$$f(X) = 8a\left(X - \frac{3}{8}\right)^2 - \frac{9}{8}a + 1, \quad 0 \leq X \leq 1$$

$a < 0$  のとき  $f(0) = 1, f(1) = 2a + 1$  であるから, 条件は

$$2a + 1 \leq 0 \quad \text{より} \quad a \leq -\frac{1}{2}$$

$a = 0$  のとき  $f(X) = 1$  であるから, 条件を満たさない.

$a > 0$  のとき  $f(0) > 0, f(1) > 0, 0 < \frac{3}{8} < 1$  であるから, 条件は

$$-\frac{9}{8}a + 1 \leq 0 \quad \text{より} \quad a \geq \frac{8}{9}$$

したがって, 求める  $a$  の値の範囲は

$$a \leq -\frac{1}{2}, \quad \frac{8}{9} \leq a$$

(2)  $f(x) = x^3 - 3x - 2$  とおくと,

$$f(x) = (x-2)(x+1)^2, \quad f'(x) = 3(x+1)(x-1)$$

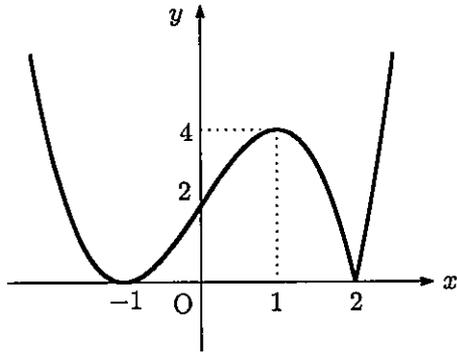
したがって,  $g(x) = |-f(x)|$  の増減は

$x$		-1		1		2	
$g'(x)$	-	0	+	0	-		+
$g(x)$		↘ 極小	↗	極大	↘	極小	↗

$y = g(x)$  の極値は

$$\text{極小値: } g(-1) = g(2) = 0, \quad \text{極大値: } g(1) = 4$$

したがって、 $y = g(x)$  の概形は図のようになる。



直線  $y = ax + 8$  が点  $(2, 0)$  を通るとき、

$$0 = 2a + 8 \quad \text{より} \quad a = -4$$

$y = -f(x)$  上の点  $(t, -f(t))$  における接線の方程式は

$$y - (-t^3 + 3t + 2) = (-3t^2 + 3)(x - t) \quad \text{より} \quad y = (-3t^2 + 3)x + 2t^3 + 2$$

これが点  $(0, 8)$  を通るとき、

$$8 = 2t^3 + 2 \quad \text{より} \quad t = 3^{\frac{1}{3}}$$

したがって、

$$a = -3t^2 + 3 = 3 - 3^{\frac{5}{3}}$$

以上より、求める  $a$  の値の範囲は

$$-4 < a < 3 - 3^{\frac{5}{3}}$$